इकाई 1 गणित सीखना

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

उद्देश्य

1.2 दैनिक जीवन में गणित

1.2.1 गणित हमारे चारों ओर है

1.2.2 गणित में सम्मिलित की जाने वाली क्रियाएँ

1.3 गणितीय विचार कैसे विकसित होते हैं?

1.3.1 मूर्त से अमूर्त की ओर

1.3.2 विशिष्ट से व्यापक की ओर

1.3.3 सोपानक्रमिक संरचनाएँ

1.4 गणित का स्वरूप

1.4.1 गणितीय कथन स्पष्ट होते हैं

1.4.2 गणित सुसंगत है

1.4.3 संकल्पनात्मक एवं प्रक्रियात्मक

1.4.4 प्रतीकों की भूमिका

1.5 गणितीय विधि से सोचना

1.5.1 क्रम (प्रतिमान) की पहचान

1.5.2 सामान्यीकरण

1.5.3 निरूपण

1.5.4 अवधारणाओं में अन्तः संबंध

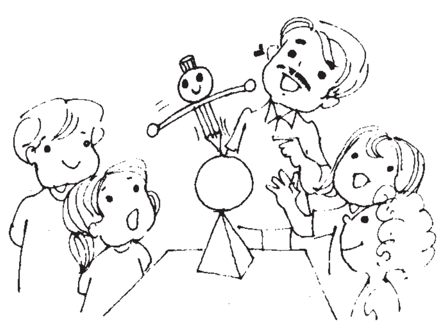
1.6 सारांष

1.7 अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

1.1 प्रस्तावना

हम सभी ने जीवन में गणित को कभी न कभी अनुभव किया है। इस दौरान कुछ लोगों को यह पसंद आई है, और इसलिए उन्हें इसे करने में मज़ा आता है लेकिन कुछ और लोगों को गणित विशेष पसंद नहीं आता, और वे इसे एक अप्रिय आवश्यकता के रूप में देखते हैं और वहीं कुछ ऐसे लोग भी हैं, जिनके गणित संबंधी अनुभव कड़वे रहे हैं और इसलिए वे गणित से दूर ही रहते हैं।

(क) गणित! ना बाबा ना!



(ख) गणित! अरे, वाह!

चित्र 1 : गणित के प्रति दृष्टिकोण

गणित में ऐसी क्या "विशेषता" है कि यह लोगों में इतनी अलग–अलग भावनाएँ उत्पन्न करती हैं? बच्चे इसे इतना कठिन क्यों समझते हैं? इस इकाई में हम इन्हीं प्रष्नों का हल ढूंढने का प्रयास करेंगे।

पहले हम कुछ उदाहरणों और उनके विश्लेषणों के द्वारा यह प्रदर्षित करने का प्रयास करेंगे कि गणित का प्रयोग हम किस प्रकार करते हैं? यह कितना आवष्यक है? और यह कितना मनोरंजक व मनोहर है? **इन्हीं विशेषताओं के कारण गणित जीवन के क्षेत्रों में लगातार और अधिक महत्वपूर्ण होता जा रहा है।**

अंत में हम देखेंगे कि गणित किस प्रकार हमारे सोचने की प्रक्रिया को प्रभावित करता है?

इस पूरी इकाई में हम बच्चों के गणित सीखने की आवष्यकता के बारे में आपको विष्वास दिलाना चाहते हैं।

अब कुछ शब्द इस इकाई की प्रस्तुति के बारे में। जैसे–जैसे आप इसे पढ़ेंगे, आपको बहुत से उदाहरण, विचार, मत और तर्क मिलेंगे, जिनसे आप गणित के महत्व और स्वरूप के बारे में सोचने लगेंगे, ऐसी अपेक्षा है। यहाँ पर आप जो कुछ भी पढ़ें उसके सही या गलत होने के बारे में अवष्य विचार करें और यदि आप यहाँ पर उठाए गए विषयों पर बिल्कुल अलग निर्णयों पर पहुँचे, तो बिल्कुल संकोच न करें। यदि आपके तर्क ठोस है, तो आप संभवतः हमें भी अपने विचारों से सहमत करा सकें।

उद्देष्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप यह बता सकेंगे किः

- गणित हमारे दैनिक जीवन में किस तरह उपयोगी हैं;
- गणितीय संकल्पनाएँ किस प्रकार विकसित होती हैं;
- गणित की विशेषताओं की पहचान कैसे की जाए?
- गणितीय विधि से सोचने का अर्थ क्या है? और
- आप उन आधारभूत क्षमताओं की पहचान कर सकेंगे जो गणित सीखने से बच्चों में विकसित होती है।

अब हम बात करेंगे कि हम क्यों ऐसा समझते हैं कि गणित हर जगह उपस्थित है।

1.2 दैनिक जीवन में गणित

जीवन में गणित संबंधित आपके प्रमुख अनुभव क्या हैं? हममें से बहुत से लोगों के लिए गणित सिर्फ एक विषय है जो विद्यालय में पढ़ाया जाता है। लेकिन क्या हमारे जीवन में गणित का सिर्फ यही रूप है? क्या उन लोगों का गणित से सामना नहीं होता है जो कभी विद्यालय नहीं जाते? आइए, देखें।

1.2.1 गणित हमारे चारों ओर है

जब आप सुबह उठते हैं तो सबसे पहले क्या करते हैं? क्या अपने लिए एक प्याला अच्छी–सी कॉफी या चाय बनाते हैं? यदि ऐसा है, तो आप गणित का प्रयोग कर रहे हैं! क्या आप इससे सहमत हैं?

एक लकड़ी का सामान बनाने वाले को लीजिए जो एक मेज बना रहा है, क्या वह किसी रूप में गणित का प्रयोग करता है? किसी कपड़े सिलने वाले, दूध बेचने, सब्जी बेचने वाले

या मिस्त्री को देखिए। क्या ये लोग किसी न किसी रूप में गणित का प्रयोग करते हैं? जब हम रेल या बस से जाते हैं, या अपनी गाड़ी चलाते हैं या अपने बच्चे के विद्यालय में शुल्क देते हैं तो हम गणित का प्रयोग करते हैं। चारपाई बुनना, उपग्रह को कक्ष में भेजना, इमारतें और पुल बनाना – क्या इनमें से कोई भी कार्य गणित का प्रयोग किए बिना किया जाता है?

और तरह–तरह के खेलों के बारे में आपका क्या विचार है? एक क्रिकेट कप्तान ने एक बार कहा था कि यदि वह क्षेत्र रक्षकों को मैदान में ठीक तरह से खड़ा कर दें तो दूसरी टीम को "आउट" करने का काम आधा हो जाएगा और क्षेत्ररक्षण सजाने के लिए किस की आवष्यकता होती है? खेल और स्थान की अच्छी समझ की। खो–खो, कबड्डी, फुटबॉल, बास्केटबॉल आदि सभी में स्थान को प्रयोग करने की सहज जानकारी की आवष्यकता होती है।

चित्र 2: फुटबॉल का खिलाड़ी गणित का प्रयोग करता है।

और षतरंज जैसे खेलों के बारे में क्या विचार है? खेलते समय आपको हर समय जीतने की योजना बारे में सोचना होता है। इसके लिए आपको हर समय मोहरों की संभावित चालों के बारे में सोचना पड़ता है। अट्ठा–छंगा, लूडो, चौपड़, व्यापार और इसी प्रकार के दूसरे खेलों में भी खिलाड़ी गणित का अच्छा प्रयोग करते हैं।

निम्नलिखित अभ्यास करते समय आप ऐसे बहुत से और उदाहरण दे सकते हैं जिनमें हम गणित का प्रयोग करते हैं।

E1) एक भीतर (Indoor) और एक बाहर खेले जाने वाले (Outdoor) खेल के बारे में सोचिए जो आप या आपके बच्चे खेलते हैं। बताइए, कि उन्हें खेलने में गणित का किस तरह प्रयोग होता है?

E2) मेरा एक मित्र कहता है, "रसोई में काम करते समय गणित का बहुत प्रयोग करता हूँ।" ऐसे चार उदाहरण बताइए जिनमें रसोई में गणित का प्रयोग होता है।

E3) एक मित्र से बातचीत में मैंने कहा, "गणित हमारे चारों और पाई जाने वाली लगभग प्रत्येक वस्तु में है। रंगोली की रचना, कपड़ों के डिजाइन और छापे, नृत्य, बच्चों को खिलाना–पिलाना और रेल पकड़ना, सभी में गणित का प्रयोग होता है।" वह इस बात से बिल्कुल असहमत था और उसने कहा "तुमने जो बातें कही हैं उनमें से कुछ में संभवतः गणित का कुछ प्रयोग होता है परंतु हर बात में गणित का प्रयोग नहीं होता।" आप मुझसे सहमत हैं या मेरे मित्र से? और क्यों?

क्या अब भी आप नहीं मानते हैं कि गणित आपके जीवन के उन सभी क्षेत्रों में पाया जाता है, जिनमें आपकी रुचि है? यह और बात है कि संभवतः आप इससे अनजान है। हमारी बात को और मूर्त बनाने के लिए अब एक और स्थिति पर विचार कीजिए।

चित्र 3: लता द्वारा अनजाने में गणित का प्रयोग

लता अपने घर के सामने वाले पेड़ पर एक झूला डालकर उस पर झूलना चाहती है। इसके लिए क्या उसे गणित की आवष्यकता है? झूला डालने के लिए उसे एक रस्सी की और पेड़ की एक उचित डाल की आवष्यकता होगी। उसे इससे संबंधित कई प्रश्नों पर विचार करने की आवष्यकता है, जैसेः

1) डाल कितनी ऊँची होनी चाहिए?

2) वह कितनी मजबूत होनी चाहिए?

3) जब कोई और झूला झूलेगा, तो क्या दूसरी डालें बाधा नहीं डालेंगी?

4) रस्सी कितनी लम्बी होनी चाहिए? क्या रस्सी की लंबाई का डाल की ऊँचाई से कोई संबंध है?

5) रस्सी कितनी मोटी होनी चाहिए?

6) क्या लता और उसकी सहेली साथ–साथ झूल सकते हैं?

इन सब प्रष्नों के उत्तर के लिए लता को गणित का ज्ञान होना आवष्यक है। जैसे, प्रष्न 3 के उत्तर के लिए, उसे ज्यामिति की कुछ समझ होनी चाहिए। उसे अपने मन में यह अनुमान लगाना होगा कि जब झूला, ऊपर–नीचे जाएगा तब रस्सी कितना घूमेगी, और यह तय करना होगा कि पेड़ की कोई दूसरी डाल झूले में बाधा तो नहीं डालेगी।

मान लीजिए लता अपना झूला डालने में सफल हो जाती है, यदि उसे कोई झुलाने वाला न हो तो वह रस्सी को खींच कर अपने पैरों से, स्वयं धक्का देकर और अपने षरीर को झूले पर एक समान गति से हिलाते हुए, झूले को चला सकती है। जैसे–जैसे झूला ऊपर–नीचे जाना षुरु करता है, उसे झूले की गति और लय के साथ–साथ हिलना पड़ता है, और इस तरह से जोर लगाना पड़ता है कि झूला और ऊपर जाए।

इस प्रकार, झूले को डालने और प्रयोग करने में लता अपने अनुभव से **बहुत–सी ऐसी राषियों का अनुमान लगाती हैं जो कि गणितीय विधियों से परिकलित की जाती हैं।** वह अनुमान लगाती हैं, उनकी जाँच करती है और यह तय करती है कि उन्हें प्रयोग किया जाए या नए अनुमान लगाए जाएँ। वह यह अनुभव किए बिना यह सब करती है कि वह गणित का प्रयोग कर रही है और इसलिए वह ये सब बिना किसी थकान और ऊब के करती है।

निम्नलिखित अभ्यास आपको इस उदाहरण और दूसरे उदाहरणों को और ध्यान से समझने का अवसर देते हैं।

E4) ऊपर दिए गए प्रष्नों का उत्तर देने के लिए लता को गणित के किन क्षेत्रों की जानकारी होनी चाहिए? चुनने का कारण भी दीजिए।

E5) i) राषियों के अनुमान लगाना, और/या

ii) संबंधों को दर्षाना, और/या

iii) नमूनों को समझना,

इनके उदाहरण निम्नलिखित स्थितियों में दीजिएः

क) हरी जयपुर में रहता है और उसे 23 मार्च को 10.00 बजे (प्रातः) तक दिल्ली पहुँचना है।

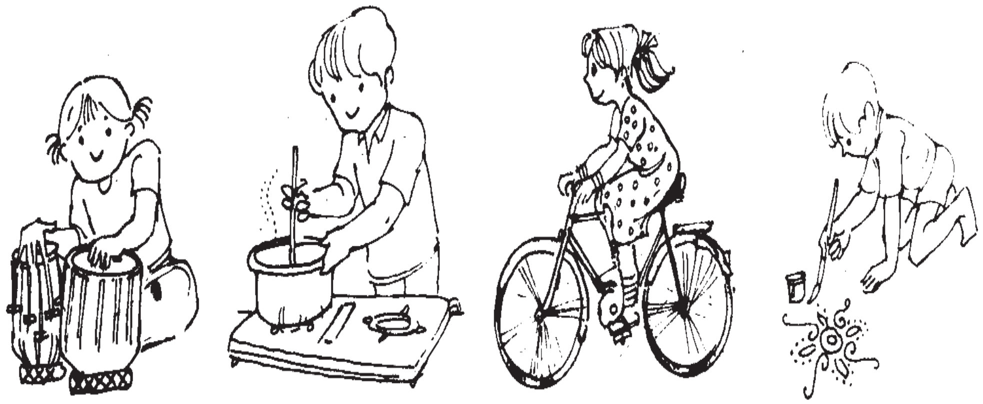
ख) सुरेष स्वेटर बुनना चाहता है।

अब तक आपने समझ लिया होगा कि गणित केवल विद्यालय की पाठ्यपुस्तकों तक सीमित नहीं है। वास्तव में, हम गणित को अपने चारों और देख सकते हैं। लेकिन, क्या यह उन सभी कार्यों में है जो हम करते हैं? आइए, देखें।

1.2.2 गणित में सम्मिलित की जाने वाली क्रियाएँ

इसका उत्तर "हाँ" भी है और "नहीं" भी। उन लोगों के लिए, जो गणित की खोज करते हैं और जो जानते हैं कि इसे कहाँ ढूँढ़ना है, उत्तर "हाँ" है। जो लोग इसे नहीं ढूँढ़ते हैं, उनके लिए गणित केवल वही है, जो विद्यालय में सीखते हैं, जिसका उनकी वास्तविक संसार से कोई संबंध नहीं होता है। दूसरे षब्दों में, गणित जमीन पर पड़े हुए रोड़ों या पत्तियों की

तरह नहीं है जो उठाए जाने का इंतज़ार करते हैं, इसको खोजने के लिए सतह के नीचे तक जाना होगा।



चित्र 4: गणित हर जगह है।

इसको समझने के लिए, आइए, चपाती बनाने का उदाहरण लें। मेरा एक दोस्त प्रकाष कहता है कि चपाती पकाने में बहुत से रसायन विज्ञान के सिद्धांतों का प्रयोग होता है। उसका क्या अभिप्राय है? उसके अनुसार, जब "चपाती" पकाई जा रही होती है तो कुछ ऐसे रासायनिक परिवर्तन होते हैं जिनके बारे में उसने विद्यालय में "रसायन विज्ञान" की कक्षा में पढ़ा था।

लेकिन मेरी एक दूसरी दोस्त कहती है कि जब वह चपाती बनाती है तो वह ज्यादा रुचि उन आकारों में लेती हैं जो बेलते समय आटे से बनते हैं। उसे बेलन की चाल और इन आकारों के बीच संबंध ढूँढ़ना भी अच्छा लगता है। अर्थात्, जिस प्रक्रिया में उसे गणित दिखाई देता है, उसी प्रक्रिया में प्रकाष को रसायन विज्ञान दिखाई देता है। यह उदाहरण बताता है कि किसी भी कार्य, घटना या तथ्य को अलग–अलग दृष्टिकोणों से देखा और समझा जा सकता है। यदि हम उसमें सन्निहित गणित की खोज करेंगे, तो वह हमें दिखेगी। एक बार हम अपनी "गणितीय आँखों" को खोल लें और नियमों और नमूनों को देखना प्रारम्भ कर दें तो हम लगभग हर वस्तु में गणित देख सकते हैं – चाहे वह कोई गीत हो, कोई कहानी की पुस्तक हो, भिनभिनाती हुई मक्खी का पथ हो, माचिस के डिब्बे का आकार और इसकी सतहों की संख्या हो, इन सतहों को ढकने के लिए आवष्यक कागज का अनुपात हो, घर में बिजली के तार हों, पत्तियों के आकार हों, आदि।

विशेष रूप से, बच्चों की सभी गतिविधियाँ और अनुभव गणित से ओतप्रोत होते हैं। **इन अनुभवों को उन गणितीय विचारों और संकल्पनाओं से जोड़ना चाहिए जो हम उन्हें पढ़ाते हैं।** तभी ये विचार उन्हें उपयोगी लगेंगे और वे इन्हें आसानी से समझ सकेंगे।

E6) निम्नलिखित गणितीय संकल्पनाओं से संबंधित बच्चों के जीवन से कम से कम एक–एक अनुभव बताइएः

जोड़, आयतन, सममिति, प्रायिकता

अब तक आप यह जान गए होंगे कि आप जाने–अनजाने गणित का कितना प्रयोग करते हैं। निम्नलिखित चर्चा से संभवतः आपको कुछ अनुमान हो जाए कि हम मनोरंजन के लिए गणित को कैसे प्रयोग कर सकते हैं?

कभी–कभी जब मेरे पास खाली समय होता है तो मैं विभिन्न प्रकार के मनोरंजक गणितीय प्रष्नों को हल करने का प्रयास करती हूँ। कभी मेरे दोस्त और मैं प्रष्न बनाते हैं और कभी ये हमें मनोरंजक पुस्तकों में मिल जाते हैं। आप भी इन प्रष्नों को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते? इन्हें आप अपने ख़ाली समय में कर सकते हैं।

1) मान लीजिए मैं आपको माचिस बनाने की फैक्टरी लगाने के लिए निम्नलिखित षर्तों पर उधार देती हूँ:

   - मैं आपको पहले 50,000 रुपये फैक्टरी लगाने के लिए दूँगी, और तीन महीने तक प्रतीक्षा करूँगी ताकि आप साधन खरीद सकें और उत्पादन षुरु कर सकें। (मान लीजिए 50,000 रुपये इस कार्य के लिए पर्याप्त है।)

   - जब तीन महीने पूरे हो जाएँगे और आप उत्पादन प्रारम्भ कर देंगे, मैं आपको 60 दिनों तक 50,000 रुपये प्रतिदिन दूँगी।

   - इसके बदले मेरी आपसे एक छोटी सी अपेक्षा है। आप पहले दिन मुझे एक माचिस की तीली देंगे, दूसरे उसकी दुगनी (अर्थात, 2), तीसरे दिन उसकी दुगनी (अर्थात, $2 \times 2 = 4$), और यह जन्म अगले 60 दिनों तक चलेगा।

   - 60वें दिन जब कार्रवाई पूरी हो जाएगी तो हमारा समझौता समाप्त हो जाएगा, और हमें एक दूसरे को कुछ देना शेष नहीं रहेगा। उस बड़ी धनराषि के बदले, जो मैंने आपको दी होगी, मैं उन माचिस की तीलियों से संतुष्ट हो जाऊँगी जो आप मुझे 60 दिनों में दोगे।

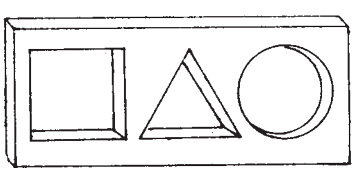
   क) क्या आप यह प्रस्ताव स्वीकार करेंगे?

   ख) इस आदान–प्रदान में किसको लाभ होगा, और कितना?

नाई वाला प्रष्न श्री बर्ट्रंड रसल (Sir Bertrand Russell) का एक विरोधाभास (paradox) है।

2) किसी गाँव में केवल एक नाई है। वह गाँव के उन सब आदमियों की दाढ़ी बनाता है जो खुद अपनी दाढ़ी नहीं बनाते हैं। क्या नाई अपनी दाढ़ी बनाएगा?

3) आपको एक लकड़ी का टुकड़ा दिया जाता है जिसमें तीन छिद्र हैं (चित्र 5 देखें। छिद्रों के आकार एक वर्ग, एक त्रिभुज और एक वृत्त हैं। क्या आप लकड़ी के टुकड़े से एक ऐसा खाचा (प्लग) बना सकते हैं, जो तीनों छिद्रों में एकदम सही बैठे?



चित्र 5

4) “जादुई वर्ग” (magic square)

8	1	6
3	5	7
4	9	2

को लीजिए। यदि आप इसकी किसी पंक्ति, या स्तंभ या विकीर्ण की संख्याओं को जोड़ें तो उसका योग प्रत्येक स्थिति में बराबर (15) होगा। इस गुण के कारण इसे जादुई वर्ग कहते हैं। क्या आप 1 से 16 तक की संख्याओं से 4×4 का एक जादुई वर्ग बना सकते हैं?

5) वह बड़ी से बड़ी संख्या कौन–सी है जो चार बार 1 का प्रयोग करके लिखी जा सकती है? (आप संख्याओं पर सभी संक्रियाओं का प्रयोग कर सकते हैं, लेकिन केवल अंक 1 का प्रयोग कर सकते हैं, और वह भी 4 बार। उत्तर 1111 से बहुत बड़ा है।)

6) 24 लोगों को 6 पंक्तियों में इस प्रकार खड़ा करें कि प्रत्येक पंक्ति में 5 लोग हों।

क्या आपको इन्हें हल करने में आनन्द नहीं आया? जब मैं यात्रा करती हूँ या काम में व्यस्त नहीं होती, तो मुझे ऐसे प्रष्न हल करने में बहुत आनन्द आता है। इसी प्रकार, बच्चों को

भी ऐसी मानसिक क्रियाओं में उस वक्त तक आनन्द आता है जब तक ये पहेलियाँ उनकी समझ से बाहर न हो।

अब एक अवसर आपको "मनोरंजक गणित" के उदाहरण सोचने का।

E7) बच्चों के लिए ऐसी तीन प्रष्न–पहेलियाँ बनाइए जिनमें उन्हें यह अनुभव करने में सहायता मिले कि गणित मनोरंजक है। अपने आसपास के बच्चों पर इनका अभ्यास कीजिए। पता लगाइए, कि कौन–सी पहेली उन्हें अच्छी लगी और क्यों?

अभी तक हमने गणित के केवल एक पक्ष के बारे में बात की है – हमारे दैनिक जीवन में इसकी उपयोगिता। लेकिन क्या इसलिए गणित को "विज्ञान की रानी" कहा जाता है? नहीं। इस पद का कारण है गणितीय संकल्पनाओं का सौन्दर्य और षक्ति, जो गणित की उन विशेषताओं के कारण से है जिनकी अब हम चर्चा करेंगे।

1.3 गणितीय विचार कैसे विकसित होते हैं?

इस भाग में हम गणितीय अवधारणाओं के स्वरूप के तीन पक्षों पर विचार करेंगे। ये मूर्त से अमूर्त की तरफ बढ़ते हैं, विशिष्ट से व्यापक की ओर बढ़ते हैं, और सोपानक्रमिक संरचनाएँ बनाते हैं। आप कह सकते हैं कि ये तीन पक्ष किसी भी क्षेत्र में ज्ञान की खोज में देखे जा सकते हैं। हम गणित के संदर्भ में इनकी जाँच करेंगे, और देखेंगे कि ये गणित के लिए कितने मौलिक, अहम और महत्वपूर्ण हैं।

1.3.1 मूर्त से अमूर्त की ओर

सभी मानव ज्ञान की तरह, गणित भी हमारे ठोस अनुभवों से विकसित होता है। त्रिविमीय आकारों का ही उदाहरण लीजिए। सोचिए कि "गोलाई" या गोल की संकल्पना को आपने कैसे समझा? क्या आपकी मानसिक प्रक्रिया कुछ इस प्रकार की थी?

अमूर्तः जो मूर्त या ठोस रूप से अनुभव न किया जा सके।

हम अपने चारों और बहुत तरह की वस्तुएँ देखते हैं। उन्हें देखने पर हम पाते हैं कि उनमें से कुछ वस्तुओं जैसे गेंद, संतरा, तरबूज, लड्डू, में एक ही प्रकार की नियमितता है, अर्थात् गोलाई और इस प्रकार हमारे मस्तिष्क में "गोलाई" की अवधारणा धीरे–धीरे विकसित होती है। हम गोल वस्तुओं को उन वस्तुओं से अलग कर सकते हैं जो गोल नहीं हैं। हम यह भी अनुभव करते हैं कि गोलाई का गुण, जो सब गोल वस्तुओं में होता है, इन वस्तुओं के अन्य गुणों, जैसे जिन पदार्थों से वे बने हैं, उनके आमाप, या उनके रंग, से संबंधित नहीं है। धीरे–धीरे हम गोलाई की अवधारणा को उन मूर्त (या ठोस) वस्तुओं से अलग करने लगते हैं जिनसे उसे प्राप्त किया गया है। गोलाई के मूलभूत गुण के आधार पर हम गोले की अवधारणा को विकसित करते हैं। एक बार जब हम यह अवधारणा बना लेते हैं तो गोले की बात करते समय हमें किसी विशेष वस्तु के विषय में सोचने की आवष्यकता नहीं पड़ती है। हमने इस अवधारणा को अपने मूर्त अनुभवों से सफलतापूर्वक अमूर्त (abstract) स्तर पर प्राप्त कर लिया है।

इसी प्रकार, हम "लालरंग" की अवधारणा भी विकसित करते हैं, परन्तु इस अवधारणा और गणितीय अवधारणा में एक बहुत बड़ा अंतर है। पहली बात, प्रत्येक गणितीय अवधारणा से अन्य गणितीय अवधारणाएँ विकसित होती है। उदाहरण के लिए गोले की अवधारणा से हम संबंधित त्रिज्या, केन्द्र, गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल और आयतन की अवधारणाएँ विकसित करते हैं।

दूसरी बात, संबंधित अवधारणाओं के बीच पूरी तरह अमूर्त और औपचारिक संबंध के बारे में हम सोच सकते हैं। उदाहरण के लिए, गोले और उसके आयतन के बीच के संबंध को देखिए। चाहे गोले का आकार कुछ भी हो या वह किसी भी पदार्थ का बना हो, संबंध वही रहता है। गोले का आयतन केवल उसकी त्रिज्या पर निर्भर करता है, चाहे गोला कितना भी बड़ा या छोटा हो।

इस तरह हम मूर्त वस्तुओं से अमूर्त गणितीय अवधारणा प्राप्त कर सकते हैं। साथ ही, हम अन्य संबंधित अमूर्त विचार उत्पन्न कर सकते हैं, और सैद्धांतिक रूप से हम उनके बीच के संबंध का अध्ययन कर सकते हैं। ये अमूर्त गणितीय विचार उन मूर्त अनुभवों से अलग हमारे मस्तिष्क में समा जाते हैं, जिनसे ये विकसित हुए। ये विचार बहुत–सी संबंधित अमूर्त अवधारणाओं और उनके बीच के संबंधों को जन्म दे सकते हैं। विचारों और संबंधों की श्रृंखला बढ़ती रहती है और हमारे अमूर्त संसार को और बड़ा बनाती जाती है।

अब आप गणित के स्वरूप के इस पक्ष से संबंधित एक और उदाहरण के बारे में सोचिए।

E8) क्या आप समझते हैं कि संख्या पद्धति इस प्रकार विकसित हुई है? यदि हाँ तो कैसे?

आइए, अब गणित के विकास का एक दूसरा पक्ष देखें। इसका उस पक्ष से घनिष्ठ संबंध है जिसकी अभी हम चर्चा कर रहे थे।

1.3.2 विशिष्ट से व्यापक की ओर

चित्र 6 : पूंछ तो पूंछ है

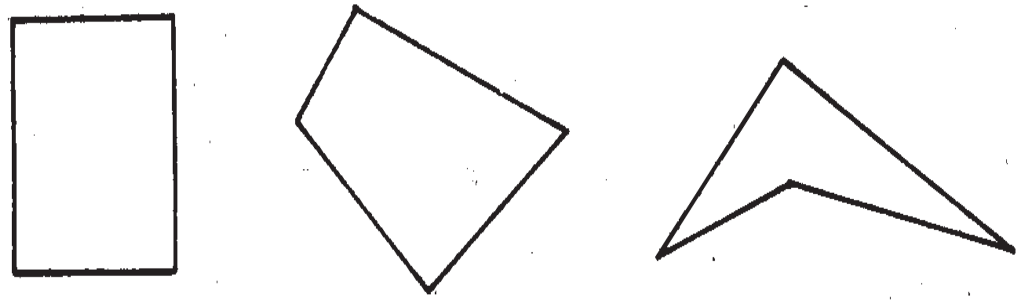
जब मैं कहती हूँ, "पूँछ", तो आपकी आँखों के सामने कौन–सी तस्वीर आती है? घोड़े की पूँछ की, या बंदर की पूँछ की? या आपको अपने पालतू कुत्ते की पूँछ दिखती है?

किसी विशिष्ट पषु की पूँछ में बहुत–सी ऐसी विशेषताएँ होती हैं जो "पूँछ" की अवधारणा में नहीं है। उदाहरण के लिए, मेरे घोड़े की दो फुट लम्बी काली पूँछ है। मैं उसके बालों की मोटाई, उसके रंग, वह कोण जो वह षरीर के साथ बनाती है, आदि बता सकती हूँ, लेकिन क्या यह बातें किसी भी घोड़े की पूँछ के लिए सही होंगी? क्या इनमें से कुछ विशेषताओं को अलग–अलग घोड़ों के लिए बदलने की आवष्यकता नहीं होगी? इसलिए, अगर मैं इस अवधारणा को सब घोड़ों पर लागू करना चाहती हूँ, तो मुझे घोड़े की पूँछ की ऐसी तस्वीर बनानी होगी, जो केवल मेरे घोड़े की पूँछ की विशेषताओं तक सीमित न हो।

अब, मैं पाती हूँ कि गायों और कुत्तों के षरीरों पर भी ऐसे ही अंग लगे होते हैं। इसलिए अपनी अवधारणा में सब पषुओं की पूँछों को सम्मिलित करने के लिए मैं इसे और भी व्यापक बनाती हूँ।

इसलिए, एक विशिष्ट स्थिति से लेकर और ज्यादा स्थितियों को सम्मिलित करने के लिए अवधारणा को व्यापक बनाते समय, हम विशिष्ट स्थिति के कुछ गुणों को छोड़ देते हैं और उन गुणों को चुनते हैं, जो सभी उदाहरणों में है। हम उनके इन सामान्य गुणों से व्यापक अवधारणा बनाते हैं।

क्या यह वही विधि नहीं है जिससे हम चतुर्भुज की अवधारणा बनाते हैं? हम वर्गों, आयतों, समलंब, इत्यादि को जाँचते हैं, और वे गुण चुनते हैं जो सब में पाए जाते हैं, यानि कि ये सभी चार भुजाओं वाली बंद आकृतियाँ हैं। इस प्रकार, हम चार भुजाओं की एक बंद आकृति की व्यापक अवधारणा बनाते हैं और ऐसी किसी भी आकृति को चतुर्भुज कहते हैं।



चित्र 7: विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज

अब तक आपने देखा होगा कि जब हम विचारों को व्यापक बनाते हैं, तो हम ज्यादा अमूर्तता की ओर बढ़ रहे होते हैं। इसी बात से संबंधित है निम्नलिखित अभ्यास।

E9) विशिष्ट से व्यापक की ओर बढ़ने की प्रक्रिया को दर्षाने के लिए प्राकृतिक संख्याओं और भिन्नों से संबंधित एक–एक उदाहरण लिखिए।

E10) क्या विशिष्ट से व्यापक की ओर जाना वैसा ही है जैसे मूर्त से अमूर्त की ओर जाना? क्यों?

आइए, अब हम गणित के एक और महत्वपूर्ण पक्ष पर विचार करें।

1.3.3 सोपानक्रमिक संरचनाएँ

जैसे–जैसे मूर्त वस्तुओं और पदार्थों से प्राप्त विचार अमूर्त होते जाते हैं, वैसे–वैसे उनमें षामिल अवधारणाओं का भी विस्तार होता जाता है। अगर व्यापकता की प्रक्रिया के हर चरण को लिखते जाएँ तो हमें विचारों की एक श्रृंखला मिलेगी, जिसमें हर अवधारणा उससे अगली (ज्यादा व्यापक) अवधारणा में सम्मिलित होगी।

उदाहरण के लिए, संख्या पद्धति पर ध्यान दें:

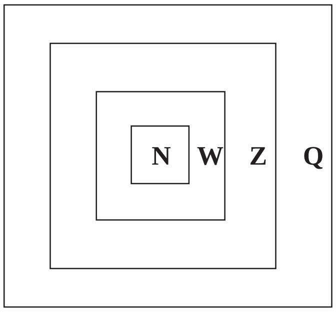
विचारों का सोपानक्रम, विचारों की एक प्रणाली है जिसमें उनको अलग–अलग श्रेणियों के अनुसार क्रमिक रूप से एक के ऊपर एक व्यवस्थित किया जाता है।

- मूर्त वस्तुओं को गिनने से हमें प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ प्राप्त होता है।
- अगर इस समुच्चय में हम षून्य को सम्मिलित करें तो हमें पूर्ण संख्याओं का समुच्चय $W = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ प्राप्त होता है।
- इस समुच्चय में ऋणात्मक संख्याओं को सम्मिलित करके और बढ़ाया जा सकता है, और तब हमें $Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ पूर्णाकों का समुच्चय प्राप्त होता है।
- पूर्णाकों के समुच्चय में धनात्मक और ऋणात्मक भिन्नों को जोड़ कर हम **परिमेय संख्याओं** का समुच्चय Q प्राप्त कर सकते हैं और इसी प्रकार आगे भी। इस **सोपानक्रम** (hierarchy) को हमने चित्र 8 में दिखाया है।

अब अगर मैं यह नहीं जानती कि प्राकृतिक संख्याओं का क्या अर्थ है, तो मैं पूर्ण संख्याओं को कैसे समझ पाऊँगी? इसी प्रकार, यदि मैं संख्याओं का अर्थ नहीं समझ पाती, तो मुझे नहीं लगता कि मैं समझ लूँगी कि परिमेय संख्याएँ क्या हैं? इसलिए, इनमें से प्रत्येक अमूर्त अवधारणा को समझने के लिए मुझे विचारों के सोपानक्रम में उससे पहले आनी वाली प्रत्येक अवधारणा को समझने की आवष्यकता है।

अब उन गणितीय विचारों को ध्यान से देखिए जिनसे आप परिचित हैं, और निम्नलिखित अभ्यास करने का प्रयास कीजिए।

E11) गणित की तीन सोपानक्रमिक शृंखलाएँ लिखिए। इसके लिए आप संख्याओं पर संक्रियाओं, ज्यामिति और बीजगणित से संबंधित उदाहरणों को ले सकते हैं।



चित्र 8 : संख्या पद्धति में सोपानक्रम

अवधारणाओं के सोपानक्रम का, अवधारणाओं को सीखने की विधियों से गहरा संबंध भी होता है। यदि आप किसी अवधारणा के ऐतिहासिक विकास को देखें तो आप पाएँगे कि अधिकांशतः सोपानक्रम में नीचे आने वाली अवधारणाएँ सोपानक्रम में ऊपर आने वाली अवधारणाओं से पहले आती हैं। बच्चे भी अवधारणाओं को लगभग इसी प्रकार ग्रहण करते हैं, इसलिए **बच्चों को विचारों के सोपानक्रम से उसी क्रम से परिचित कराना अच्छा होगा जिस क्रम में वे विकसित हुए हैं।** दुर्भाग्य से, हमेशा ऐसा नहीं होता है।

उदाहरण के लिए, वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत है और आयत एक विशेष प्रकार का समांतर चतुर्भुज (parallelogram) है। लेकिन बहुत से बच्चों को कक्षा 2 में ये तथ्य एक साथ ही बिना उनके आपस में संबंध को बताए सिखाए जाते हैं। इसका क्या परिणाम होता है? दो साल बाद भी उनमें से बहुत से कहेंगे कि वर्ग समांतर चतुर्भुज नहीं है।

इसलिए किसी भी नए गणितीय विचार को अच्छी तरह से समझने के लिए, उससे पहले आने वाले गणितीय विचारों को अच्छी तरह समझना आवष्यक है। हमारा यही अभिप्राय है, कि गणित एक सोपानक्रमिक विधियाँ से संरचित ज्ञान क्षेत्र है। निम्नलिखित अभ्यासों में हम आपसे षिक्षण के लिए इस बात का क्या महत्व है, इस पर विचार करने को कह रहे हैं।

E12) गणित की सोपानक्रमिक संरचना एक कारण है जिसके कारण इसे पढ़ना/पढ़ाना कठिन समझा जाता है। क्या आप इस कथन से सहमत हैं? क्यों?

अब तक हमने गणितीय विचार के विकसित होने के और उन्हें ग्रहण करने के कुछ विधियों को जाना। आइए, अब हम गणित की विशेष प्रकृति पर विचार करें।

1.4 गणित का स्वरूप

इस भाग में हम जानेंगे कि गणित, संचार का इतना षक्तिषाली माध्यम क्यों है? हम गणित के उन पक्षों की खोज करेंगे जो इस क्षमता का सृजन करते हैं और गणित सिखाने की प्रक्रिया में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं।

1.4.1 गणितीय कथन स्पष्ट होते हैं

किसी ऐसी गणितीय संकल्पना पर विचार कीजिए जिससे आप परिचित हैं, हम संख्या 5 को लेते हैं। जब आप 5 को एक संख्या के रूप में प्रयोग करते हैं, जैसे कि वस्तुओं को गिनने के लिए तो आप ठीक तरह से जानते हैं कि आप कितनी वस्तुओं के बारे में बात कर रहे हैं? वे पेंसिलें, पुस्तकें, गुटके हो सकते हैं। आप जानते हैं कि एक बार सीखने के बाद $2 + 3 = 5$ का क्या तात्पर्य है? ये सभी वस्तुएँ, संकल्पनाएँ, कथन स्पष्ट और सही अर्थ देते हैं। इसमें अस्पष्टता का कोई स्थान नहीं। मान लीजिए हम एक गोले की बात कर रहे हैं, हम केवल यही नहीं जानते कि इसका अर्थ गोलाई से है, बल्कि हम यह भी जानते हैं कि गोलाई का यह संदर्भ गोले में गोलाई के भाव से भिन्न है। हम यह ठीक तरह से

जानते हैं कि हम एक चूड़ी को एक गोले के उदाहरण के रूप में नहीं बताएंगे और एक गेंद को एक वृत्त के उदाहरण के रूप में नहीं बताएंगे।

गणित में सभी कथन, चाहें वे परिभाषा हो या परिणाम दर्शाने वाला वाक्य स्पष्ट होते हैं। ऐसा क्यों होता है? गणित एक मानवीय प्रत्यय है। हम गणित के अमूर्त संसार के निर्माण में प्रत्येक बिन्दु को स्पष्ट करते हैं। इसके लिए हम तर्कों का सावधानी पूर्वक चयन करते हैं, गणितीय प्रत्ययों की परिभाषाओं का निर्माण करते हैं तथा ऐसे कथनों का निर्माण करते हैं जो विभिन्न गणितीय प्रत्ययों और कथनों में अंतःसम्बन्ध तथा अर्न्तसम्बन्घ को स्पष्ट करते हैं।

हम हमेषा गणितीय कथनों के बारे में बता सकते हैं कि वे सत्य है अथवा असत्य। यह गणितीय ज्ञान को षक्ति प्रदान करता है क्योंकि यह व्यक्तिगत विचारों पर निर्भर नहीं रहता है।

हाँ अक्सर जब हम गणितीय षब्दों को गणित के बाहर वास्तविक जीवन में प्रयोग करते हैं तो हम उन्हें गणितीय परिभाषा के अनुसार प्रयोग नहीं करते हैं। इसका अच्छा उदाहरण "आधा" और "त्रिकोण" है। जरा सोचिए हम गणित में इन पदों का कैसे प्रयोग करते हैं और हम अपनी बातचीत में इन्हें कैसे प्रयोग करते हैं?

E13) ऐसे और उदाहरण लिखिए जिनमें गणितीय षब्दों को अषुद्ध रूप से दैनिक जीवन में प्रयोग किया गया हो। विचार कीजिए कि क्या प्रतिदिन की स्थितियों में इन षब्दों के अषुद्ध प्रयोग कोई समस्या उत्पन्न होगी है?

अभी तक हमने गणित के ऐसे बहुत से पक्षों की बात की जो दूसरे क्षेत्रों में भी पाए जाते हैं। लेकिन अब हम जिसकी बात करने जा रहे हैं वह गणित की विशेषता है।

1.4.2 गणित सुसंगत है

हमने अभी जाना कि गणित मानव द्वारा विकसित की जा रही है। यह विकास की प्रक्रिया क्या है? हम गणितीय कथनों को क्या कहते हैं? हम यह कैसे दावा करते हैं कि ये कथन अपने अर्थों में स्पष्ट और षुद्ध हैं, गणित सत्य की निरंतरता का विषय है जो कि तर्क के प्रयोग द्वारा देखी जाती है। इसे हम उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

"दो विषम संख्याओं का योग एक सम संख्या होती है" इस कथन पर विचार करते हैं।

क्या हम इस कथन को कई स्थितियों में जाँचकर स्वीकार करते हैं? कितनी स्थितियाँ पर्याप्त होगी? हम किस प्रकार आष्वस्त हो सकते हैं कि यह कथन उन स्थितियों में भी सत्य होगा, जिनकी जाँच नहीं की गई है? गणित में किसी कथन की सत्यता स्वीकृत सत्यों पर आधारित है और इसे तर्क के आधार पर स्वीकार किया जाता है। हम कथनों की एक श्रृंखला विकसित करते हैं जो इस तथ्य की ओर ले जाती है।

दो विषम संख्याओं पर विचार करते हैं। विषम संख्याएँ वे संख्याएँ हैं, जिन्हें दो से भाग देने पर एक शेष रहता है। अतः विषम संख्याएँ, 1 के गुणज व. +2 के गुणज से 1 अधिक हैं। इसलिए जब हम दो विषम संख्याओं को जोड़ते हैं तो हम एक ऐसी संख्या प्राप्त करते हैं जो 1+ (2 का गुणज) + (1 + 2 के गुणज) के रूप में है, (2 + 2) का गुणज (+ 2) के गुणज के बराबर है, यह स्पष्ट रूप से 2 से भाज्य है, क्योंकि 2 के सभी गुणज, 2 से भाज्य हैं। चूँकि 2 से भाज्य संख्याएँ सम संख्याएँ कहलाती हैं अतः यह संख्या सम संख्या है।

यहाँ पर हमने परिभाषाओं (विषम, सम, गुणज) का प्रयोग किया है तथा पूर्व रूप से परिणाम और तर्क निकाला है (संख्याओं का जोड़ निकालते समय क्रम पर ध्यान नहीं दिया जाता, 1 + 1 = 2, 2 के गुणजों का योग 2 से भाज्य है)। किसी भी स्थिति में पृथक संख्याओं के अवलोकन पर निर्भरता नहीं थी। पूर्व ज्ञात परिणामों और परिभाषाओं का प्रयोग करते हुए तर्क किया गया था।

जैसा कि हमने पहले देखा कि इस प्रकार की संरचना का निहितार्थ जानने के लिए पहले से प्राप्त परिणामों और परिभाषाओं को जानने की आवष्यकता होगी, जिनका संबंध गणित की सोपानक्रमिक संरचना से होता है, इस प्रकार का तर्क, जो ज्ञात परिणामों, परिभाषाओं और निष्कर्ष के नियमों को कुछ सिद्ध करने के लिए कहता है, **निगमनिक तर्क** कहलाता है।

E14) सिद्ध कीजिए कि कोई भी सम संख्या, जो दो से बड़ी है, निगमनिक तर्क का प्रयोग करते हुए अभाज्य नहीं हो सकती।

E15) अपने अनुभव से गणितीय कथनों के दो उदाहरण दीजिए और निगमनिक तर्क का प्रयोग करते हुए उन्हें सिद्ध कीजिए।

जैसे ही हम गणित की सोपानक्रमिक संरचना को विकसित करते हैं, क्या हम एक दूसरे के विरोधी कथन कहते हैं नहीं, गणित में हमारे पास ऐसी कोई स्थिति नहीं होती, जहाँ हम यह जान सकें कि गणितीय कथन और इसका विरोधाभासी, दोनों साथ–साथ सत्य अथवा असत्य हैं। इसका क्या अर्थ है? हम जानते हैं कि गणित में षून्य से भाग देना मान्य नहीं है। क्या आप कभी इसके बारे में आष्चर्य में पड़े थे? हम 5 को 0 से भाग देते हैं। भाग का क्या अर्थ है? मान लीजिए यदि कोई संख्या (जिसे हम भाज्य कहते हैं) किसी दूसरी संख्या से भाग दी जाती है (जिसे हम भाजक कहते हैं), तब हम जानते हैं कि भाज्य, भाजक का गुणज होगा। वास्तव में हम इस संबंध को जानते हैं जैसा कि भाज्य = भागफल × भाजक। इसलिए यदि भाज्य = 5 और भाजक = 0 हो तो क्या होगा? हम पाएँगे 5 = भागफल × 0 = 0; जैसा कि हम जानते हैं कि 0 के सभी गुणज 0 हैं। हम 5 और 0 को विभिन्न समुच्चयों को प्रतिनिधित्व करने वाली संख्या के रूप में जानते हैं, इसलिए बराबर नहीं हैं। हमने यहाँ देखा है कि यदि हम स्वीकृत तथ्य के रूप में 0 के उस भाग को स्वीकार करते हैं, तो हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि 5 = 0, जो पूर्व स्वीकृत इस तथ्य को विरोधी बतलाता है, कि 5 और 0 भिन्न संख्याएँ हैं।

हम ऐसी स्थितियों से दूर रहने के लिए सजग रहे हैं, जैसा कि हमने गणितीय संकल्पनाओं को विकसित करते समय किया। यही कारण है कि गणित सुसंगत है। इसका अर्थ है कि जब कभी हम ऐसी स्थिति में आते हैं; जिसमें हम कुछ और नकारात्मक सत्य पायें तो हमें सजग रहने की आवष्यकता है यह विचार करने की आवष्यकता है कि जब हमने अपने तर्क का निर्माण किया तब क्या गलत हो गया है?

यह जागरूकता हमें बच्चों द्वारा विभिन्न परिप्रेक्ष्य में की गई त्रुटियों पर ध्यान देने में मदद करेगी इसके विषय में हम दूसरी इकाई में जानेंगे।

अब तक हम इस बारे में बात कर चुके हैं कि गणित में कथन किस प्रकार अपनी वैधता प्राप्त करते हैं? हम किस प्रकार किसी कथन को अस्वीकार करने के बारे में निर्णय लेते हैं?

इस कथन पर विचार करें **किसी अभाज्य संख्या के वर्ग के न्यूनतम चार गुणनखंड होते हैं।**

सबसे पहले हम कुछ अभाज्य संख्याओं को देखते हैं और पता लगाते हैं कि क्या उनमें यह गुण है? 2 को देखिए, जो कि पहली रूढ़ संख्या ध्यान में आती है। 2 का वर्ग 4 है, जिसके गुणनखंड हैं 1, 2, 4; अतः अभाज्य संख्या 2 के वर्ग के चार या उसके अधिक गुणनखंड नहीं है। यह दर्षाने के लिए यह पर्याप्त हैं कि हमने जिस कथन पर विचार किया, वह सत्य नहीं है। ऐसे उदाहरण के विषय में हम कहते हैं कि "2" हमें **प्रति उदाहरण** (counter-example) देता है।

गणित में किसी भी कथन की सत्यता को स्थापित करने में हमारे दृष्टिकोणों में अंतर को देखिए। जब हम किसी कथन की सत्यता को स्थापित करना चाहते हैं तो हम तर्क का प्रयोग करते हुए एक युक्ति का निर्माण करते हैं, जैसे हम सभी संभव स्थितियों में सत्य को देखने की आवष्यकता समझते हैं। यद्यपि यह दावा करने के लिए, कि कुछ कथन वैध नहीं हैं, केवल एक उदाहरण ही पर्याप्त है, जिसके लिए यह सत्य नहीं है।

अब हम क्यों न एक और अभ्यास करने का प्रयास करें?

E16) सिद्ध कीजिए कि कथन ''व्यंजक $n^2 - n + 41$ एक अभाज्य संख्या देता है जब n 1, 2, 3 ...... के किसी भी मान को लेता है'' गलत है।

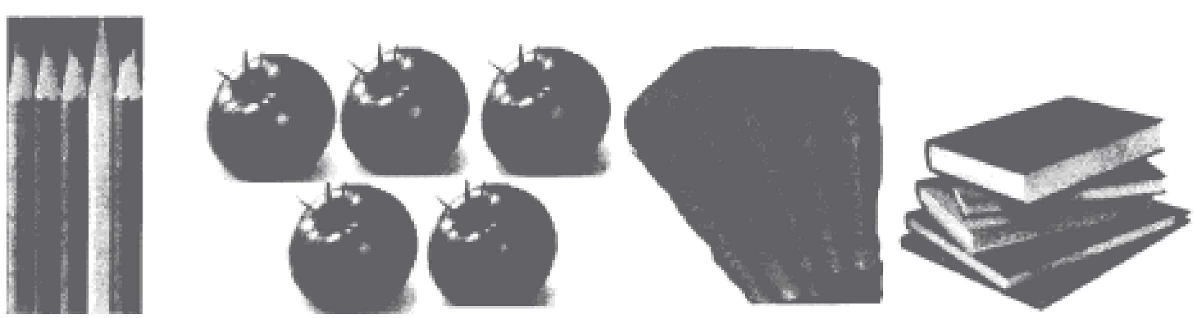
E10) क्या विशिष्ट से व्यापक की ओर जाना वैसा ही है, जैसे मूर्त से अमूर्त की ओर जाना? क्यों?

1.4.3 संकल्पनात्मक एवं प्रक्रियात्मक

दो व्यापक श्रेणियाँ, जिनमें हम गणितीय ज्ञान को विभाजित कर सकते हैं – संकल्पनात्मक ज्ञान और प्रक्रियात्मक ज्ञान हैं।

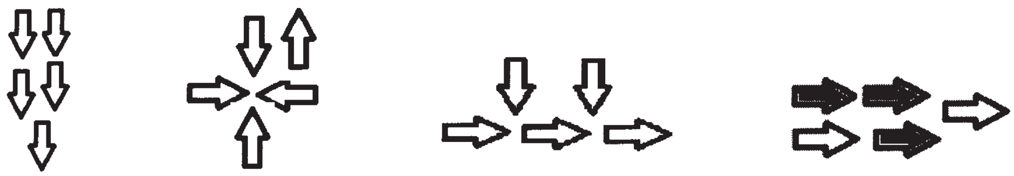
इन श्रेणियों का अर्थ समझने के लिए हमें संकल्पनाओं को समझने और सूत्रविधियों (Algorithms) को प्रयोग करने की आवष्यकता है, जिन्हें हम गणित करते समय जानते हैं। संकल्पनात्मक ज्ञान की श्रेणी का संबंध, संकल्पनाओं और उनके मध्य संबंधों से है जबकि प्रक्रियात्मक ज्ञान का संबंध, किसी कार्य को करने के लिए विविध प्रक्रियाओं के क्रियान्वयन से है। आइए, अब हम इन्हें सीखने वाले की दृष्टि से देखते हैं।

संकल्पनात्मक ज्ञान (Conceptual Knowledge) का संबंध सीखने वाले के मस्तिष्क में संकल्पनाओं (अमूर्त विचारों) के निर्माण एवं विकास से है। संकल्पनाएँ विभिन्न स्थितियों के अवलोकन का परिणाम हैं, जो हमें उन स्थितियों में निहित समानताओं को पहचानने की अनुमति देती हैं। संकल्पनाएँ वे विचार हैं, जो अमूर्तीकरण (Abstraction) के अन्त में उभरते हैं। अमूर्तीकरण विभिन्न स्थितियों में एक विशेष लक्ष्य को पहचानने की प्रक्रिया है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित चित्र को देखो, आपके मस्तिष्क में क्या आता है?



चित्र 9

यहाँ पर पाँच सितारे, पाँच टमाटर, पाँच गोले और पाँच पुस्तकें हैं जो कि अमूर्त स्तर पर स्पष्ट करती हैं कि इन प्रत्येक चित्र में पाँच वस्तुएँ हैं और विभिन्न वस्तुओं के समूह के इस अनुभव से हम पाँच की संकल्पना का निर्माण करते हैं। इन सभी चित्रों में निहित विचार के साथ इस प्रक्रिया में हमने एक ध्वनि "पाँच" को सम्मिलित किया है जो हमें विभिन्न परिस्थिति में उसी विचार को संप्रेषित करने के योग्य बनाती है। एक बार हमने पाँच की संकल्पना को बना लिया, तो हम पहचान जाते हैं कि निम्नलिखित चित्र में आकार, रंग, स्थिति और तीरों के दर्षाने की दिषा के बाद भी वस्तुएँ पाँच ही हैं।

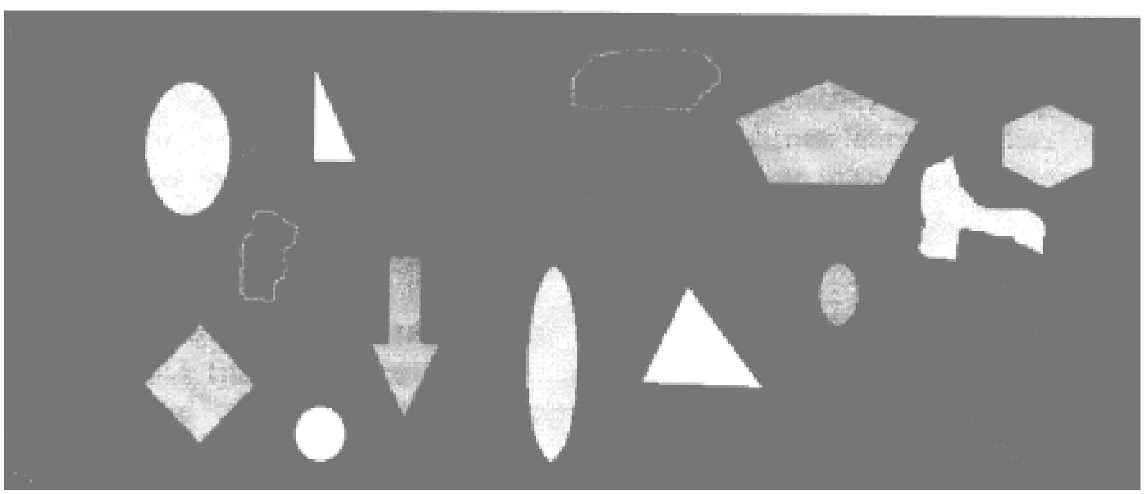


चित्र 10

शब्द "पाँच" की ध्वनि का तब तक कोई अर्थ नहीं है, जब तक कि हम उन स्थितियों का विवरण प्राप्त नहीं कर लेते, जिनमें हमें वस्तुओं के संग्रह के आकार के भाव को बनाना है।

एक बार यदि हमने एक, दो, तीन, चार और इससे आगे की संकल्पना विकसित कर ली, तो हम संख्या की संकल्पना को एक गणितीय सत्त्व के रूप में प्राप्त करते हैं जिससे हम संग्रहों के आकार के अर्थ को सम्बन्धित करते हैं।

हम विभिन्न आकारों का अवलोकन करते हैं और देखते हैं कि एक निष्चित गुण जैसे गोलाई की दृष्टि से कुछ एक जैसे हैं और अन्य विभिन्न प्रकार के हैं।



चित्र 11

वर्गीकरण के द्वारा हमारे मस्तिष्क में गोलाई की संकल्पना विकसित होती है। साथ ही साथ हम यह भी विचार प्राप्त करते हैं कि आकारों के कोने होते हैं।

हम संकल्पनाओं का नाम देने के लिए परिभाषाएँ बनाते हैं ताकि हम उनके बारे में सम्प्रेषण कर सकें। परिभाषाएँ हमें संकल्पनाओं से संबंध बताती है क्योंकि वे उन गुणों पर संकेन्द्रण करती हैं जो संकल्पनाओं की विशेषता बताते हैं। हालाँकि यह विष्वास करना गलत है कि

हम संकल्पनाओं को समझते हैं अथवा हम नाम या शब्दों को जानते हैं। जो परिभाषा का निर्माण करते हैं, उन्हें आवष्यकता पड़ने पर सफलतापूर्वक प्रयोग कर सकते हैं। हम "षून्य" की संकल्पना पर विचार करते हैं। हम शून्य की परिभाषा को बहुत कम समझते हैं जैसे कि वह संख्या जो खाली समूह/समुच्चय के आकार का प्रतिनिधित्व करती है। ऐसा केवल तब होता है जब हम शून्य को $6 + 0 = 6$ जैसी संख्याओं के जोड़ने में प्रयोग करते हैं, तो हम शून्य को किसी और से संबंधित करना प्रारंभ करते हैं। संकल्पनात्मक ज्ञान केवल तभी विकसित होता है जब सीखने वाला विभिन्न संदर्भों और विभिन्न स्तरों पर संकल्पना का अनुभव करता है।

हमें यह अनुभव करने की आवष्यकता है कि गणितीय संकल्पनाएँ अमूर्त हैं और साथ ही साथ वे अनुभव योग्य भी हैं, क्योंकि वे मूर्त स्थितियों में जन्म लेती हैं। यद्यपि हम निगमनात्मक तर्क का प्रयोग करते हुए संकल्पनाओं के मध्य संबंध स्थापित करते हैं; तब भी वे आनुभाविक स्थितियों में व्याख्या किए जाने पर अच्छे ढंग से समझी जाती हैं। उदाहरण के लिए, "क्षेत्रफल" की संकल्पना को "क्षेत्र की दूरी की मात्रा" के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।

यह अमूर्त परिभाषा समझ के स्तर पर शायद ही कुछ बताती है। "क्षेत्रफल" की अवधारणा की समझ तभी होती है, जब हम मेज के ऊपरी भाग, कागज, धरातल, बिस्तर अथवा ऐसी ही वस्तुओं को देखते हैं। जैसे ही बच्चे इन वस्तुओं की छानबीन करते हैं और अपने अनुभव में एकरूपता का अनुभव करते हैं, उनके मस्तिष्क में क्षेत्रफल की संकल्पना बन जाती है।

परिभाषाएँ, संकल्पनाओं की नाम बिल्कुल नहीं हैं, वे केवल वहाँ पर सम्प्रेषण के सुसाधयकर्त्ता के रूप में हैं। हालाँकि, यदि अध्यापक/विद्यार्थी इन विचारों से संबंध स्थापित करने में असमर्थ है, जो कि उस संकल्पना सम्मिलित हैं तो परिभाषा केवल कुछ शब्दों का संग्रह मात्र रह जाएगी क्योंकि इस प्रकार की परिभाषाएँ विद्यार्थियों को बिल्कुल नहीं दी जानी चाहिए। संकल्पनाएँ केवल खोज कर ही समझी जा सकती हैं।

दूसरे श्रेणी का ज्ञान **प्रक्रियात्मक ज्ञान (procedural knowledge)** हैं, जो एक निष्चित कार्य को करने की कार्यविधि को जानने से संबंधित होता है। उदाहरण के लिए, जब हम दो अंकों की संख्याओं को जोड़ते हैं तो हमें निष्चित रूप से इकाई के कॉलम से प्रारंभ करना चाहिए; इसे आगे ले जाना चाहिए यदि योग 9 से अधिक है और तब दूसरे कॉलम को जोड़ना चाहिए। अंत में यदि कुल योग 9 से अधिक होता है तो सैकड़ा के कॉलम का प्रयोग करना चाहिए। इस कार्य को सीखने योग्य बनने के लिए सबसे पहले हमें यह देखने की आवष्यकता है कि उन पदों को उसी क्रम में कार्यान्वित करना चाहिए, जिनमें कि उनका उल्लेख किया गया है। हालाँकि पदों (steps) को याद करने के लिए यह आवष्यक है कि विद्यार्थी प्रत्येक पद के पीछे निहित तर्क और उस पद के पीछे निहित संकल्पना को समझे। उदाहरण के लिए, यदि विद्यार्थी स्थानीय मान की संकल्पना से संतुष्ट नहीं है तो वह "आगे ले जाने" (carrying) के पद के महत्व को समझने में कठिनाई अनुभव करेगा।

यद्यपि हम गणितीय ज्ञान के दो पक्षों के बारे में बात कर चुके हैं, फिर भी हम इसे समझने की आवष्यकता है, कि गणितीय ज्ञान में दोनों में अन्र्त सम्बन्ध हैं। प्रक्रियात्मक ज्ञान का विकास प्रक्रिया के विभिन्न पदों में प्रयोग किए गए सम्प्रत्ययों की समझ पर निर्भर है, जबकि हमें संकल्पनाओं का प्रयोग करने के लिए भी प्रक्रियात्मक ज्ञान की आवष्यकता है।

निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिएः

राहुल के पास 435 आम थे। उसने उन्हें 3 रुपये प्रति आम की दर से बाजार में बेंच दिया। अब राहुल के पास कितने पैसे हैं?

यहाँ तक कि यदि कोई गुणा करने की संकल्पना से अवगत हैं और यह जानता है कि ऐसी स्थिति में 435 और 3 को गुणा किया जाना है, गुणा करने की सूत्रविधि को जाने बिना हम यह नहीं बता सकते कि राहुल के पास कितने पैसे हैं? दूसरी तरफ हर कोई जानता है कि इन संख्याओं को कैसे गुणा किया जाए, लेकिन यह नहीं समझता कि स्थिति गुणा करने की अवधारणा के प्रयोग करने की माँग करती है, हर कोई अब भी पूछे गए प्रश्न का उत्तर देने योग्य नहीं होगा।

हम गणित केवल तभी समझ सकते हैं जब हम गणितीय ज्ञान की प्रकृति के दोनों पक्षो को समझते हों।

E17) स्थानीय मान की संकल्पना पर विचार कीजिए। वे दो प्रक्रियाएँ लिखिए जिसमें यह संकल्पना एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती हैं।

E18) दो प्रक्रियाओं की पहचान कीजिए, जिन्हे आपके विद्यार्थी कठिन समझते हैं, संकल्पनाओं की पहचान कीजिए।

1.5.4 प्रतीकों की भूमिका

"सात हजार छः सौ तिरेपन को चार हजार नौ सौ इक्यासी से गुणा कीजिए।" इसे हल करने की कोषिष कीजिए, संख्याओं को अंकों में लिखें बिना, अर्थात् 0 से 9 तक के अंकों का प्रयोग किए बिना। ऐसे में प्रष्न को समझना भी एक समस्या है। दूसरी तरफ, यदि मैं लिखूँ $7653 \times 4981 = ?$ तो क्या प्रष्न को समझना सरल नहीं हो जाता? क्या यह सरलता **प्रतीकों** (symbols) के प्रयोग के कारण आयी है।

एक और उदाहरण लीजिए। निम्नलिखित कथन को पढ़िएः

"सात और आठ के योग को इसी योग से गुणा करने पर जो प्राप्त होता है, वह आठ को आठ से और सात को सात से गुणा करने पर और सात और आठ के गुणनफल के दुगने के योग के बराबर होता है।"

क्या आपको कुछ समझ आया? अब इसे देखिएः

$(7+8)^2 = 7^2 + 8^2 + (2 \times 7 \times 8)$

यह वही कथन प्रतीकों से लिखा गया है। यह प्रतीकात्मक निरूपण, कथन को संक्षिप्त और स्पष्ट बनाता है, यदि पढ़ने वाला प्रतीकों को समझ सकें और उनके प्रयोग से बने कथनों को पढ़ सके।

आप जानते हैं कि गणित ऐसे अमूर्त विचारों से संबंध रखता है जो सुनिष्चित और स्पष्ट होते हैं। इन संकल्पनाओं को प्रयोग करने के लिए, और उन्हें दूसरों को स्पष्ट रूप से बताने के लिए, हमें संकेतों के सामान्य निकायों और उनके सामान्य नियमों को प्रयोग करने की आवष्यकता है। इन निकायों से गणित की शक्ति बढ़ती है, और ये हमें आसानी से यह देखने का अवसर देते हैं कि कोई गणितीय तर्क मान्य है या नहीं।

विभिन्न संक्रियाओं के लिए गणितीय प्रतीकों के प्रयोग से उन संक्रियाओं की **सूत्रविधि** (Algorithm) को प्रयोग करना आसान हो जाता है। परंतु **एक चेतावनी**! यद्यपि प्रतीक और सूत्रविधियाँ संक्रियाओं को सरल और तेज़ बनाते हैं, साथ ही वे इसे मषीनी भी बनाते हैं। गणित पढ़ाते या सीखते समय, अक्सर बिना यह समझे कि हम क्या व क्यों कर रहे हैं, हम संक्रियाओं को मषीनी रूप से करना सीख जाते हैं, और वही करने लगते हैं।

सूत्रविधि : किसी प्रष्न को हल करने के लिए एक विशेष क्रम में लागू की जाने वाली चरणों की शृंखला।

एक उदाहरण के तौर पर, निम्नलिखित प्रष्न पर विचार कीजिए:

$$5132 \div 5$$

हममें से ज्यादातर लोग इसको चित्र 12 में दिखाई गई विधि से हल करेंगे। परंतु हममें से कितने लोग यह पूछते हैं कि:

क) 5 को 5132 के नीचे इस प्रकार ही क्यों लिखते हैं?

ख) तीसरे पद में 13 कैसे आया और क्यों?

ग) वहाँ पर 13 लिखने के लिए भाज्य में 0 लिखने की आवष्यकता मुझे क्यों है?

```
    1026
 5)5132
   5
   ---
   13
   10
   ---
    32
    30
    ---
     2
```

चित्र 12

मैं संभवतः इन प्रष्नों का, या इन जैसे बहुत से दूसरे प्रष्नों के उत्तर नहीं दे सकूँ। फिर भी मैं प्रष्न को सही तरह से हल कर सकूँगी।

यह स्थिति गणित पढ़ाने में सबसे गंभीर समस्या खड़ी करती है। अधिकतर अध्यापक खुष हो जाते हैं यदि बच्चे सूत्रविधि को अच्छी तरह से सीख जाएँ, चाहे उन्हें यह पता भी न हो कि

सिर्फ सूत्रविधि को सीखना गणित सीखना नहीं है। वे नहीं जानते कि

सूत्रविधि से सही उत्तर क्यों मिलते हैं? लेकिन सीखने की इस विधि से बाद में बच्चों को गणितीय अवधारणाओं को समझने में बहुत कठिनाई होती है और कभी–कभी तो इस विधि से आगे का अध्ययन पूरी तरह रूक जाता है। यहाँ अब आपके लिए एक अभ्यास है।

E19) आप निम्नलिखित में से कौन–सी विधि में विष्वास करते हैं, और क्यों?

i) बच्चों को सूत्रविधि सीखने से पहले, उसे उसमें सम्मिलित गणित को सीखना चाहिए।

ii) बच्चों को सूत्रविधि में सम्मिलित गणित को समझाए बिना, उसके प्रयोग के अवसर देने चाहिए,

iii) कभी–कभी (i) सही विधि है, और कभी–कभी (ii)

1.5 गणितीय विधि से सोचना

क्या आपने कभी सोचा है कि जब आप गणित का कोई प्रष्न हल कर रहे होते हैं तो आप किन मानसिक प्रक्रियाओं से गुजर रहे होते हैं?

हम उसे ऐसे करते हैं जैसा कि हम निम्नलिखित उदाहरण में देखते हैं। आप जानते हैं कि कोई संख्या 3 से भाज्य होती है, यदि उसमें अंकों का योग 3 से भाज्य है। हम इस तथ्य पर कैसे पहुँचते हैं?

हम संख्या 3 से कुछ संख्याओं के भाग देने की प्रक्रिया को विभिन्न विधियों से देखते हैं। जैसा आप करते हैं, उस क्रम को देखो।

234 = 2 × 100 + 3 × 10 + 4 = 2 × (99+1) + 3 (9+1) + 4 = 2 × 99 + 3 × 9 + 2+ 3 + 4 चूँकि 3, 99 और इसलिए 2 × 99 को भी विभाजित करती है क्योंकि 3, 9 और 3 × 9 को भी विभाजित करती है, अतः 234, 3 से विभाजित होगी यदि 2 + 3 + 4, 3 से विभाज्य हैं।	**375** = 3 × 100 + 7 × 10 + 5 = 3 × (99+1) + 7 (9+1) + 5 = 3 × 99 + 7 × 9 + 3+ 7 + 5 चूँकि 3, 99 और इसलिए 3 × 99 को विभाजित करती है क्योंकि 3, 9 और 7 × 9 को भी विभाजित करती है, अतः 375, 3 से विभाज्य होगी यदि 3 + 7 + 5, 3 से विभाज्य हैं।
4164 =4×1000 + 1 × 100 + 6 × 10 + 4 = 4 × (999+1) + 1 × (99+1) + 6 (9+1) + 4 = 4 × 999 + 1 × 99 + 6 × 9 + 4+ 1 + 6 + 4 चूँकि 3, 999 और इसलिए 4 × 999 को भी विभाजित करती है, क्योंकि 3, 99 और 1 × 99 को भी विभाजित करती है, और 3, 9 को और इसलिए 6 × 9 को भी विभाजित करती है, अतः 4164, 3 से विभाजित होगी यदि 4 + 1 + 6 + 4, 3 से विभाज्य हैं।	**25347** = 2 × 10000 + 5 × 1000 + 3 × 100 + 4 × 10 + 7 = 2 × (9999+1) + 5 × (999+1) + 3 × (99+1) + 4 (9+1) + 7 = 2 × 9999 + 5 × 999 + 3 × 99 + 4 × 9 + 2+ 5 + 3 + 4 + 7 चूँकि 3, 9999, 999, 99 और 9 को विभाजित करती है अतः 2 × 9999 + 5 × 999 + 3 × 99 + 4 × 9 को भी विभाजित करती है। अतः 25347, 3 से विभाजित होगी यदि 2 + 5 + 3 + 4 + 7, 3 से विभाज्य हैं।

जब हम भाग देने की प्रक्रिया से गुजरते हैं तो हम भाग देने की प्रक्रिया में निहित क्रम (प्रतिमान) की खोज करते हैं जिसे कि हम नियम बनाने के लिए सामान्यीकृत कर सकते हैं; **कोई संख्या 3 से भाज्य है यदि संख्या के अंकों का योग, 3 से भाज्य है।**

इस प्रक्रिया में हमने अपनी चिन्तन प्रक्रिया को विशेष रूप से लिखे गए प्रतीकों का प्रयोग करते हुए प्रदर्षित किया है, दषमलव, स्थानीय मान पद्धति की विशेषताओं का प्रयोग किया, आनुपातिक नियम, गुणा एवं भाग के तथ्यों का प्रयोग किया आदि....।

चलिए, अब हम प्रतिमान की पहचान, सामान्यीकरण, प्रदर्षन और संकल्पनाओं के मध्य वैयक्तिक संबंधों की प्रत्येक प्रक्रियाओं को देखें:

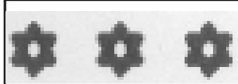
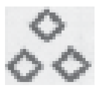
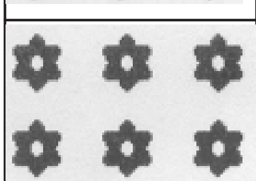
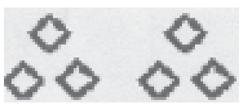
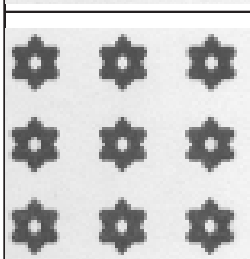
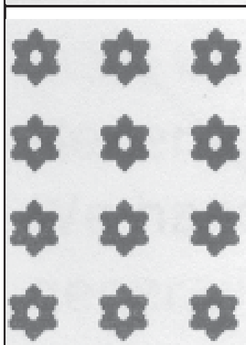
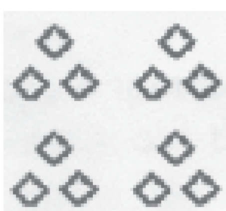
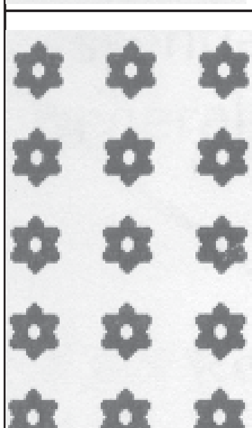
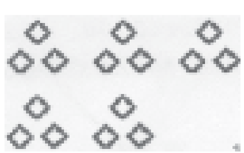
1.5.1 प्रतिमान की पहचान

जैसे ही हम प्रतिमान का अवलोकन करते हैं, गणितीय ज्ञान बढ़ता है। गणित सीखने के लिए क्रम आधारित चिंतन आधारभूत तथ्य है। बच्चे क्रम से प्यार करते हैं और जब कभी वे उन्हें अपने आस–पास पाते हैं, उनसे आनंद लेते हैं। बच्चों को क्रमों को पहचानने और उनमें संबंध स्थापित करने के लिए अवसर दिया जाना चाहिए, चाहे वे जो कुछ भी कर रहे हों। तब उन्हें बताया जा सकता है जब वे प्राप्तांकों (scores) की गणना के लिए खेल खेलते हैं। कि "गिनती करने" (counting on) में एक क्रम निहित है क्योंकि प्रत्येक बार खिलाड़ी द्वारा जीते गए अंक गिनती करने पर एक निष्चित संख्या में बढ़ सकते हैं।

प्राथमिक कक्षाओं में बच्चों में विभिन्न स्थितियों में क्रमों का निर्माण एवं पहचान करके उनके अनुभवों के आधार पर गणितीय ज्ञान का निर्माण करने की आवष्यकता होती है। उन्हें अपने क्रमों का निर्माण करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए क्योंकि वे वर्गीकरण और व्यवस्था के द्वारा मूर्त पदार्थों का प्रयोग करते हैं।

जोड़ (additions) सीखने के बाद बच्चे क्रम खोज सकते हैं जो कि गुणा के तथ्यों पर आधारित होते हैं और जिससे गुणा के प्रत्यय बनाए जाते हैं और इनके लिखने करने के लिए **पहाड़े** बनाए जाते हैं। निम्नलिखित तालिका उन विभिन्न अवसरों को दर्षाती है जिन्हें बच्चों को क्रम खोजने के लिए उपलब्ध कराये जा सकते हैं, जोकि संख्या 3 के लिए गुणा के प्रत्ययों को आगे बढ़ाता है।

तालिका 1

तारों को गिनो और उनकी संख्या लिखो	वर्गों को गिनों और उनकी संख्या लिखें	एक (1) को गिनों उनकी संख्या लिखो	क्रम (प्रतिमान)
		1+1+1 3	3 का एक समूह = 3
		1+1+1 1+1+1 6	3 के दो समूह = 6
		1+1+1 1+1+1 1+1+1 9	3 के तीन समूह = 9
		1+1+1 1+1+1 1+1+1 1+1+1 12	3 के चार समूह = 12
		1+1+1 1+1+1 1+1+1 1+1+1 1+1+1 15	3 के पाँच समूह = 15

तालिका 1 में बच्चे को यह सीखने का अवसर मिलता है कि जब हम तीन के समूहों को दोहराते हैं तो उसकी विधि पर ध्यान दिए बिना हम वहीं संख्या प्राप्त करते हैं । यह क्रम के मानसिक बिम्बन को भी ध्यान रखता है जो इन तथ्यों को याद करने के लिए उनकी सहायता करता है।

E20) निम्नलिखित जाल (Grid) में संख्याओं के वर्ग की पहचान करने के लिए एक क्रम दर्शाया गया है। नियमानुसार संख्याओं का पता लगाने के लिए दो और क्रम ज्ञात कीजिए।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

1.5.2 सामान्यीकरण

गणित सीखने के लिए सामान्यीकरण महत्वपूर्ण है। हमने अभी–अभी क्रमों के बारे में बात की है। क्रमों के आधार पर हम सामान्यीकरण करते हैं। सामान्यीकरण से हम क्या समझते हैं? यह क्रम का अवलोकन कर किसी परिणाम पर पहुँचने की एक प्रक्रिया है। सामान्यीकरण की प्रक्रिया, या तो संकल्पनाओं की ओर अग्रसर करती है अथवा संकल्पनाओं के मध्य संबंधों की ओर। सामान्यीकरण की प्रक्रिया को समझने के लिए हम एक उदाहरण लेते हैं।

चलो हम विषम संख्याओं को जोड़ें। हम पहाड़ा (table) बनाएँगे जो नीचे दिए गए उदाहरण की तरह दिखता है।

$1 + 3 = 4 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$

यह क्रम सुझाता है कि जोड़ कुछ संख्याओं के वर्ग में बदल जाता है। हम एक और जोड़ को देखते हैं जिसमें और बहुत से पद हैं:

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 21 + 23 = 144 = 12^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 21 + 23 + 25 = 169 = 13^2$

$1 + 3 + 5 + 7 + ... + 21 + 23 + 25 + 27 = 196 = 14^2$

अतः हम परिणाम का सामान्यीकरण करते हैं कि **यदि हम 1 से आगे किसी भी विषम संख्या तक विषम संख्याओं को जोड़ते हैं तो परिणाम कुछ संख्याओं का वर्ग होगा।**

जब हम सामान्यीकरण के माध्यम से गणितीय परिणाम प्राप्त कर रहे हैं तो हमें सावधान रहने की आवष्यकता है। हमें यहाँ ध्यान देना चाहिए कि एक सामान्यीकृत स्वीकार्य सत्य, गणितीय कथन तब तक नहीं बनता है जब तक कि हम पूर्व ज्ञात परिणामों का प्रयोग करते हुए निगमनात्मक तर्क के माध्यम से इस तक नहीं पहुँच जाते एक प्रक्रिया जिसे हम गणित में प्रमाण कहते हैं जब वह प्रक्रिया पूरी हो जाती है तो इस प्रकार के सामान्यीकृत कथन, ***अनुमान* (Conjectures)** *कहे जाते हैं।*

E21) दो स्थितियों के बारे में सोचिए जिनमें आप एक क्रम को सामान्यीकृत करते हुए परिणाम प्राप्त करेंगे।

1.5.3 निरूपण

चलो हम देखें कि जब बच्चों को कोई समस्या हल करने के लिए दी जाती है, वे क्या करते हैं? सभी उदाहरण हमें बताते हैं कि वे अपने स्वयं के आव्यूहों का प्रयोग करते हैं। हालाँकि इन सभी आव्यूहों में ज्ञान का कुछ निरूपण निहित है, जिसे वे प्रयोग कर रहे हैं। हम देखें कि राहुल ने क्या किया जब उसने निम्नलिखित समस्या को हल करने का प्रयास किया।

सोहन के पास 3 पुस्तकें हैं और उसके मित्र आज़म के पास 4 पुस्तकें हैं उन सभी के पास कुल कितनी पुस्तकें हैं?

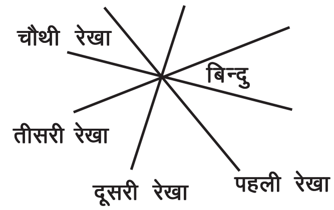
राहुल अपनी अंगुलियाँ फैलाते हुए बैठ गया। दाहिने हाथ पर उसने तीन अंगुलियों गिनीं और बाएँ हाथ पर उसने चार अंगुलियों गिनीं। फिर उसने उन सभी को गिना और कहा सात हैं।

सुधा ने आयत का प्रयोग करते हुए ठीक उसी समस्या को हल किया। उसने तीन पुस्तकों का निरूपण करते हुए तीन आयत बनाए और फिर चार और पुस्तकों का निरूपण करने के लिए चार और आयत बनाए (जैसा कि चित्र 13 में दर्षाया गया है) तब उसने उन सभी की गिनती की और उत्तर दिया, कि सात है।

चित्र 13

दोनों ही उदाहरणों में बच्चों ने संख्याओं का निरूपण करने के लिए किसी ऐसे माध्यम का प्रयोग किया, जिसके संपर्क में वे थे।

अब आप किसी समस्या को हल करने के लिए प्रयास कीजिए। एक बिन्दु से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं? जैसे ही आप आगे बढ़ें, आप जिन पदों से गुजरते हैं उन्हें ध्यान से देखें। वे बिल्कुल नीचे दिए गए उदाहरण की तरह हैं:



- आपने एक बिन्दु आलेखित किया।
- फिर उससे होकर एक रेखा खींची।
- फिर अन्य रेखा और फिर अन्य रेखा खींची।
- आपने यह अनुभव किया कि यह प्रक्रिया इसी प्रकार आगे बढ़ सकती है।
- आपने निष्कर्ष निकाला कि हम दिए गए बिन्दु से जितनी चाहे उतनी रेखाएँ खींच सकते हैं।

इस उदाहरण में विचारों के निरूपण की विधि थी – बिन्दुओं और रेखाओं का खींचना। गणित समझाने के लिए हमने हमेषा एक निरूपण तैयार किया जाता है जो हमें ज्ञान के अंष से जोड़ने में हमारी सहायता करता है जिसे कि हमने हर स्थिति में याद किया है। बच्चों को निरूपण तैयार करने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए, चाहे वे जिस किसी भी माध्यम से करना चाहें। बच्चे सामान्यतः मूर्त वस्तुओं का प्रयोग करते हैं अथवा चित्र बनाते हैं। हम सभी समस्या को हल करने के लिए तरह–तरह के निरूपणों का प्रयोग करते हैं। निरूपणों के चयन में लचीला होना, सक्षम गणितीय चिंतन का एक प्रतीक है। प्रत्येक प्रकार का निरूपण संकल्पना के विशिष्ट पक्ष को स्पष्ट करता है। लचीलेपन का अर्थ यह भी हो सकता है कि एक ही तरह के निरूपण पर विचार करना। उदाहरण के लिए, बहुत से भागों सहित एक आरेख का प्रयोग करना, जो समस्या के विभिन्न पहलुओं पर विशेष बल देता है। अवष्य ही विभिन्न निरूपणों के बीच जाने में भी लचीलापन निहित है। उदाहरण के लिए एक समीकरण और एक आरेख (ग्राफ) के बीच।

गणित षिक्षा में निरूपण कुछ मध्यमों (गणितीय अथवा अन्य) का प्रयोग करते हुए गणितीय संकल्पनाओं की अभिव्यक्ति की ओर संकेत करता है। जब गणितीय ज्ञान के निरूपण के साथ मूर्त पदार्थों, चित्रों और वास्तविक संसार के उदाहरणों का प्रयोग करते हुए, सीखने में उनकी सहायता की जाती है तब बच्चे गणितीय ज्ञान का उचित अनुभव प्राप्त करते हैं।

E22) एक शब्द समस्या लीजिए। विचार कीजिए कि किस प्रकार एक बच्चा, निरूपण के मूर्त, प्रतीकात्मक और चित्रात्मक रूपों में दी गई समस्या का निरूपण करता है?

1.5.4 अवधारणाओं में अन्तः संबंध

गणितीय संकल्पनाएँ अन्तः संबंधित होती हैं। हम प्राकृतिक संख्याओं के गुणा को जोड़ के पदों में परिभाषित करते हैं। संकल्पनाएँ प्रक्रियाओं से संबंधित होती हैं। जोड़ की प्रक्रिया स्थानीय मान की संकल्पना पर बहुत अधिक निर्भर होती है। यह अत्यंत महत्वपूर्ण है कि बच्चों को ऐसे अवसर दिये जाते हैं कि वे इन अन्तःसंबंधों को देख सकें। इसे करने की एक विधि यह है कि उन्हें ऐसी समस्याएँ दी जाएँ जो विभिन्न संकल्पनाओं को आपस में जोड़ती हैं, विषय से सम्बंधित इन संकल्पनाओं को बच्चों को पहले से ही जानना चाहिए।

निम्नलिखित समस्या पर विचार कीजिए:

123 इंच लंबी लकड़ी की पट्टी से छः इंच के कितने टुकड़े काटे जा सकते हैं?

इस समस्या को हल करने के लिए एक बच्चे को बहुत–सी संकल्पनाओं की आवष्यकता होती है। यह साधारण रूप से केवल भाग देने का प्रश्न नहीं है। सबसे पहले बच्चे को यह

अनुभव कराने की आवष्यकता है कि पट्टी की चौड़ाई यहाँ प्रासंगिक नहीं है। वह ऐसा कर सकता है, यदि वह समस्या को चित्रात्मक रूप से निरूपित करने का प्रयास करता है। दूसरी बात यह है कि 123, 6 से भाज्य नहीं है, अतः पूरे टुकड़े संभव नही हैं। 20 पट्टियाँ और एक 3 इंच का टुकड़ा या 20 1/2 पट्टियाँ या 20.50 पट्टियाँ, उत्तर पाने के लिए, उसे काटने की मौलिक क्रिया को मापन की संकल्पना से संबंधित करना है; तब संकल्पना और साथ ही साथ भाग की क्रियाविधि का प्रयोग करें। प्रारूप को भी बनाए, जिसमें उत्तर देना है। यहाँ पर निर्णायक प्रष्न यह है कि उत्तर के लिए किस गणितीय प्रतीक का प्रयोग किया जाता है? क्या उत्तर 20.50 इंच हो सकता है? बच्चा सोच सकता है कि चूँकि हम इंच को भाग दे रहे हैं तो उत्तर इंचों में होगा। यहाँ संकल्पना केवल बच्चे के लिए तब स्पष्ट हो सकती है यदि वह ऐसे निरूपण का प्रयोग करें जिसमें कि मूर्त पदार्थ अथवा चित्रात्मक आरेखन का प्रयोग किया गया हो। बच्चे को यह भी अनुभव कराने की आवष्यकता है कि उत्तर के तीन रूप समतुल्य हैं। यह केवल तब ही संभव है, जब उनकी अभिव्यक्ति विभिन्न गणितीय संकल्पनाओं के प्रयोग द्वारा की गई हो।

जैसा कि हमने देखा है कि बच्चा केवल वैयक्तिक संकल्पनाओं के ज्ञान की आवष्यकता ही अनुभव नहीं करता बल्कि उनके अंतःसंबंध और व्याख्याओं को भी अनुभव करता है। इस प्रकार के कौषल का विकास केवल बच्चों की समस्या को हल करने के लिए अवसर प्रदान करके ही दिया जा सकता है जो कि बहुत–सी संकल्पनाओं और उनकी व्याख्याओं को आपस में संबंधित करता है।

हम ऐसी अनेक समस्याओं के बारे में चिन्हन कर सकते हैं। कुछ ऐसी समस्याओं पर विचार करो, जैसी आप निम्नलिखित अभ्यास में हल करेंगे।

E23) कम से कम तीन विभिन्न स्थितियों के बारे में विचार कीजिए, जिनमें बच्चे निरूपण के कौषल को प्रयोग करने की आवष्यकता, विभिन्न संकल्पनाओं और उन स्थितियों में आह्वान की गई प्रक्रिया के अंतःसंबंधों का चित्रण करने की आवष्यकता अनुभव करते हैं।

इस भाग में हमने उस विधि को समझने का प्रयास किया है, जिस विधि से हम तब सोचते हैं जब हम गणित को प्रयोग करते हैं। ये पद निम्नलिखित रूप से वर्णित किए जा सकते हैं:

- क्रमों और संबंधों को देखिए।
- निहित विचार को पहचानिए।
- सामान्यीकरण का प्रयोग करते हुए एक कथन प्रतिपादित कीजिए और उसे स्पष्ट रूप से उच्चारित कीजिए।
- निरूपणों के माध्यम से स्थिति को समझिए।
- निहित संकल्पनाओं में संबंधों का पता लगाइए।
- तार्किक एवं व्यवस्थित रूप से विचार कीजिए।

ये क्षमताएँ समस्या समाधान की स्थितियों में सहायता करती हैं, चाहे वे गणितीय हों अथवा वास्तविक जीवन की। इन मानसिक क्षमताओं का विकास करने के लिए बच्चों की सहायता की जानी चाहिए ताकि वे जीवन की स्थितियों का सामना करने के योग्य बन सकें।

अब हम संक्षेप में देखते हैं कि हमने इस इकाई में क्या–क्या सीखा है।

1.6 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित बातों पर विचार किया है:

1) गणित प्रत्येक स्थान पर उपस्थित है, शक्तिषाली है और सुंदर है।

2) यह जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में उपयोगी है।

3) गणित का उपयोग विश्राम के समय मनोरंजन के लिए भी किया जा सकता है।

4) गणितीय विचार अधिकांषतः मूर्त परिस्थितियों से अमूर्त अवधारणाओं की ओर तथा विशिष्ट स्थितियों से व्यापक विचारों की ओर बढ़ते हैं।

5) गणितीय ज्ञान का ढाँचा सोपानक्रमिक रूप से बनता है और व्यापक रूप से इसी प्रकार ग्रहण किया जाता है।

6) गणितीय कथन और परिभाषाएँ सुनिष्चित, स्पष्ट और संदिग्धता से परे होते हैं।

7) किसी गणितीय कथन को सिद्ध करने के लिए उसे सभी स्थितियों के लिए सिद्ध करना होगा। अगर यह एक स्थिति में भी सही नहीं है, तो यह बिल्कुल सही नहीं है।

8) प्रतीकों का विस्तृत प्रयोग ही गणित को संक्षिप्त, स्पष्ट और एक शक्तिषाली संचार का माध्यम बनाता है।

9) गणित में किसी सूत्रविधि को स्वीकार करने और प्रयोग करने से पहले आपको उसके पीछे के तर्क को समझने की आवष्यकता है।

10) गणितीय दृष्टिकोण में समस्याएँ हल करना और नई समस्याएँ प्रस्तुत करना, सम्मिलित होता है। समस्याएँ हल करने के लिए सुनिष्चित क्रम से सोचने की और तार्किक विचार की कुषलता की आवष्यकता होती है।

11) किसी बच्चे को समस्या हल करने की स्थिति में रखकर उसमें जो कुषलताएँ विकसित की जाती है वह उसे वास्तविक जीवन की परिस्थितियों में भी तर्क संगत ढंग से सोचने के योग्य बनाती है।

और अब, संभवतः आप इस इकाई को एक बार और देखना चाहेंगे, यह जाँच करने के लिए कि आपने सब अभ्यास कर लिए हैं। जब आप यह सुनिष्चित कर लें कि आपने उन्हें कर लिया है तो आप संभवतः उन पर हमारी टिप्पणियाँ देखना चाहें, जो आगे दी गई है।

1.7 अभ्यासों पर टिप्पणियाँ

E1) उदाहरण के लिए वर्ग पहेली खेलते समय, मैं शब्दों की लम्बाई जिन्हें खाली स्थान में भरना है, सामान्य अक्षरों के मिलान और इसी तरह अन्य को देखने की आवष्यकता अनुभव करता है।

E2) उदाहरण के लिए, अनुपात और समानुपात, अनुमान लगाना, गिनती करना, आदि। ये क्षमताएँ किस प्रकार प्रयोग की जाती हैं?

E4) i) लम्बाई नापने में।

ii) भार नापने और डाल की मजबूती और तनाव का अनुमान लगाने में।

iv) लंबाइयों को नापने और उनकी तुलना करने में।

v) मोटाई को मजबूती से और उस भार से जो वह उठा सकती है, संबद्ध करने में।

vi) जैसे (v) में, और झूले पर भार को उसकी चाल की ज्यामिति से संबंध स्थापित करने में।

E5) उदाहरण के लिए, हरि को दूरी, जाने की गति, इत्यादि का अनुमान लगाना है, और सड़क की स्थिति को गति से संबद्ध करना है। आप बहुत से और उदाहरण सोच सकते हैं।

E6) कुछ उदाहरण देने के लिएः

हम अपने चारों ओर बहुत सी सममिति देखते हैं, और हम क्रमों को देखते व पहचानते हैं। पुष्प सज्जा, लोक चित्रकला, और कपड़ों की डिजाइन, इत्यादि सभी में सममिति और क्रमों का उपयोग होता है। पौधों में सममिति, आकार और क्रमों इत्यादि के असंख्य उदाहरण है। ऐसे उदाहरण पषुओं, वस्तुओं, चित्रों और अन्य वस्तुओं में पाए जाते हैं। लेकिन इन सबको हम गणित से संबंधित नहीं मानते हैं। इसलिए जब हम गणित की कक्षा में इन अवधारणाओं को पढ़ते हैं तो ये हमारे जीवन के अनुभवों से बिल्कुल हटकर होते हैं।

हम दैनिक बातचीत में प्रायिकता की संकल्पना का उपयोग भी कई बार करते हैं। उदाहरण के लिए,

- इंदौर–बिलासपुर गाड़ी कई बार देर से आती है। वह आज भी देर से आएगी।
- आज वर्षा होने की कोई संभावना नहीं है।
- वह अवष्य आएगा। वह अपनी बात का पक्का है।

E7) एक उदाहरण के लिए आप हमारा ऑडियो–कार्यक्रम "मजे मजे से गणित सीखना" सुन सकते हैं।

E8) भाग 1.3.3 पढ़िए।

E9) उदाहरण के लिए, दो प्राकृतिक संख्याओं का योग एक प्राकृतिक संख्या होती है; किसी प्राकृतिक संख्या n के लिए $\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}$ से बड़ा होता है। आप बहुत से और उदाहरण सोच सकते हैं।

E10) "मूर्त से अमूर्त" निष्चय ही व्यापकीकरण की ओर बढ़ना है। लेकिन "विशिष्ट से व्यापक" अमूर्त स्थिति से और अमूर्तता की ओर जाना हो सकता है, जैसे वर्गों को चतुर्भुजों में व्यापकीकृत करना।

E11) उदाहरण के लिए N में योग गुणन में व्यापीकृत होता है, जो Q में गुणन में व्यापकीकृत होता है। ज्यामिति में, एक उदाहरण n- भुजाओं के बहुभुजों का सोपानक्रम है। बीजगणित का एक उदाहरण, किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए सूत्रविधि हो सकता है, जिसे किसी संख्या का घनमूल, चतुर्थमूल आदि ज्ञात करने के लिए व्यापक किया जा सकता है।

ऐसे और बहुत से उदाहरण हैं।

E13) उदाहरण के लिए, जब लोग कहते हैं कि संसार गोल है, तो ऐसा नहीं है क्योंकि पृथ्वी पूरी तरह से गोल नहीं है।

E14) 2 से बड़ी एक सम संख्या लीजिए। यह संख्या 1 और 2 से भिन्न है। यह एक सम संख्या भी है और इस प्रकार इसका गुणज होगा। अतः 1, 2 और स्वयं यह इस संख्या के तीन विभिन्न गुणज होंगे। इसलिए यह एक अभाज्य संख्या है।

E16) $n^2 - n + 41 = 41^2$ क्योंकि $n = 41$, इसलिए $n^2 - n + 41$, एक अभाज्य संख्या नहीं देता क्योंकि $n = 41$

E17) संख्याओं पर कोई संक्रिया

E19) जहाँ तक संभव है, हम समझते हैं कि (i) का प्रयोग करना चाहिए। लेकिन कभी–कभी बच्चा इतना विकसित नहीं होता कि वह सूत्रविधि में सम्मिलित गणित समझ सकें। ऐसी स्थिति में, अध्यापक यह बात बाद में समझाने का प्रयास कर सकते हैं।

E20) a) हर संख्या पंक्ति और स्तंभ में पहली संख्या की गुणज है। उदाहरण के लिए, 45, 9 और 5 की गुणज है।

b) प्रत्येक पंक्ति संख्या की गुणज देती है।